Problème 34: Château de cartes (avec calculatrice) / Difficile

Un membre de SosToMaths s'amuse à construire des châteaux de cartes. La base d'un château est composée de plusieurs paires de cartes formant ensemble des cônes. Ces cônes sont reliés entre eux par des cartes disposées horizontalement.

Le troisième rang d'un château est par exemple constitué de 3 "cônes", reliés entre eux par 2 cartes horizontales, comme illustré ci-contre.

Ceci est un château de 4 rangs.

Quelle serait la taille (en rangs) du plus grand château constructible avec n jeux de 52 cartes ?

Solution:

Le xième rang d'un château prend 2*x+(x-1) cartes à construire. Le "2*x" représente les "cônes", et le "x-1" les cartes horizontales.

De plus, quand x augmente de 1 (quand on ajoute un rang), le nombre de cartes augmente de 3. → 2*(x+1)+(x+1-1) - (2*x+(x-1)) = 2*x + 2 + x - 2*x - x + 1 = 3

Or, le premier rang nécessite 2 cartes.

Le xème rang nécessite donc 2+3*(x-1) cartes. Il nécessite donc 3x-1 cartes.

Or, la somme de tous les 3*i - 1 pour toutes les valeurs de i allant de 1 à x vaut le triple de la somme des entiers de 1 à x (3*i pour toutes les valeurs de i) moins x (-1 à chaque fois).

Or, la somme des entiers de 1 à x vaut x(x+1)/2 donc le nombre de cartes dans un château de x rangs vaut

$$\frac{3x(x+1)-2x}{2} = 1,5x^2 + 0,5x$$

Donc, un château de x rangs nécessite $1,5x^2 + 0,5x$ cartes.

N jeux de 52 cartes contiennent 52*N cartes.

Donc, le plus grand château constructible avec N jeux de 52 cartes, est le plus grand x tel que $1,5x^2 + 0,5x$ soit plus grand que 52*N (À trouver avec la calculatrice).